

УДК 517.958

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНО-ФИЛЬТРАЦИОННОГО РЕЖИМА СИСТЕМЫ ПЛОТИНА-ОСНОВАНИЕ В УСЛОВИЯХ КРАЙНЕГО СЕВЕРА¹⁾**П.Е. ЗАХАРОВ***Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, г. Якутск**E-mail zapetch@s-vfu.ru***NUMERICAL MODELING OF TEMPERATURE-FILTRATION MODE OF THE DAM-FOUNDATION SYSTEM IN THE FAR NORTH****P.E. ZAKHAROV***North-Eastern Federal University***Аннотация**

Рассматривается численное моделирование температурно-фильтрационного режима в теле и основании каменно-земляной плотины в условиях вечной мерзлоты. В качестве примера моделируется каменно-земляная плотина Вилюйской ГЭС-1,2 в двумерной постановке. Для аппроксимации по пространству используется метод конечных элементов, по времени – схема расщепления по физическим процессам.

Ключевые слова: Математическая модель, метод конечных элементов, ненасыщенная фильтрация, фазовый переход

Summary

The numerical simulation of temperature and seepage in the body and foundation of stone-earthen dam in the permafrost. As an example, simulated dam of Vilyuiskaya hydroelectric power station 1,2 in the two-dimensional formulation. Finite element method is used for approximation in the space, and the scheme of splitting into physical processes for time.

Summary of paper

Key words: Mathematical model, finite element method, unsaturated filtration, phase transition.

Введение

Рассматриваются прикладные задачи смачивания грунта на примере увлажнения каменно-земляной плотины с противофильтрационным экраном. Для численного моделирования физического процесса строятся математические модели фильтрации в ненасыщенных и в насыщенных грунтах. Комбинация двух моделей фильтрации дает задачу с подвижной границей, которая численно решается методом сквозного счета.

1. Математическая модель насыщенной и ненасыщенной фильтрации

Рассмотрим задачу увлажнения земляной плотины в ограниченной области, которая будет представлять собой тело и основание плотины (см. рис. 1). Плотина будет состоять из водонасыщенной зоны Ω_1 и зоны аэрации, которая в свою очередь состоит из капиллярной каймы Ω_2 и воздушной зоны Ω_3 . Область плотины обозначим через Ω , где $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$.

¹⁾Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00785 А)

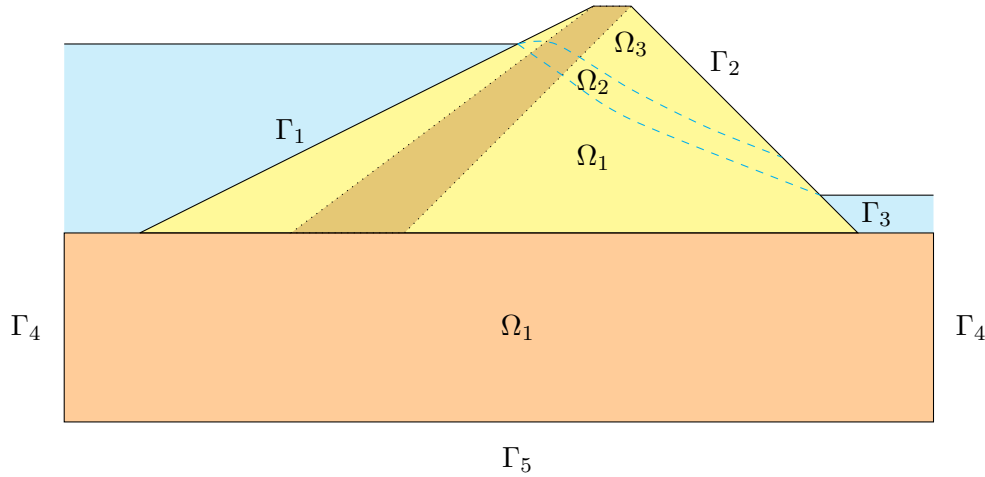


Рис. 1: Границы и подобласти земляной плотины с противофильтрационным экраном.

Движение влаги в зоне аэрации происходит по законам ненасыщенной фильтрации и описывается уравнением Ричардса

$$m \frac{\partial s}{\partial t} - \operatorname{div}(k(s) \operatorname{grad}(p_c - \rho g z)) = 0, \quad 0 < t < t_e, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

где m — пористость среды, s — доля водонасыщенности, $k(s, \mathbf{x})$ — водопроницаемость, p_c — капиллярное давление, ρ — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения, z — вертикальная координата, t_e — конечное время. Для решения задачи ненасыщенной фильтрации, уравнение (1) дополняется зависимостью доли воды от капиллярного давления (модель van Genuchten)

$$s(p_c) = \frac{1}{(1 + (\alpha p_c)^n)^{1 - \frac{1}{n}}}, \quad (2)$$

где α и n — эмпирические параметры. Коэффициент водопроницаемости определим следующим образом

$$k(s, T) = \begin{cases} k_s s^\sigma, & T \geq 0 \\ 0, & T < 0 \end{cases} \quad (3)$$

где k_s — водопроницаемость для насыщенной фильтрации, σ — эмпирический параметр, T — температура грунта. Подставив формулу (2) в (3) получим зависимость водопроницаемости от капиллярного давления.

Используя уравнения (1), (2), (3) приходим к следующему уравнению для капиллярного давления

$$m \frac{ds}{dp_c} \frac{\partial p_c}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad}(p_c - \rho g z)) = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) учитывает только капиллярное давление, которое присутствует в граничном слое грунта перехода жидкой фазы к газообразной. Для учета напорного давления с боковых сторон, где присутствуют водоемы, используем уравнение насыщенной фильтрации несжимаемой жидкости

$$-\operatorname{div}(k_s \operatorname{grad}(p - \rho g z)) = 0, \quad (5)$$

где p — напорное давление, k_s — проницаемость водонасыщенной среды. Комбинируя уравнения для насыщенной и ненасыщенной фильтраций приходим к следующему уравнению для напорного давления

$$m \frac{ds}{dp_c} \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad}(p - \rho g z)) = 0, \quad (6)$$

где $p_c = p - p_a$, а p_a — атмосферное давление.

Уравнение (6) дополняется граничными условиями Дирихле на границах контакта с водоемами и воздухом:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}, t) &= p_a + \rho g(z + h_c - h_1), & \mathbf{x} \in \Gamma_1, \\ p(\mathbf{x}, t) &= p_a, & \mathbf{x} \in \Gamma_2, \\ p(\mathbf{x}, t) &= p_a + \rho g(z + h_c - h_2), & \mathbf{x} \in \Gamma_3, \end{aligned} \quad (7)$$

а снизу и по бокам основания дамбы задаются граничные условия Неймана, непротекания

$$\begin{aligned} -k \frac{\partial p}{\partial n} &= -k \rho g, & \mathbf{x} \in \Gamma_4, \\ -k \frac{\partial p}{\partial n} &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_5, \end{aligned} \quad (8)$$

где h_c — высота капиллярного поднятия, h_1 — уровень воды с левой стороны дамбы, h_2 — с правой. Для замыкания системы определяем начальное значение давления в области дамбы:

$$p(\mathbf{x}, 0) = p_a, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (9)$$

Поставленная начально-краевая задача для давления (6)–(9) описывает нестационарный процесс смачивания грунта плотины.

2. Математическая модель теплопередачи фильтрующих грунтов с фазовым переходом

Рассматривается нелинейная нестационарная задача теплопроводности, которая описывается уравнением с фазовым переходом

$$\rho \left(c + \frac{d\varphi}{dT} \omega L \right) \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}, \text{grad } T) \right) - \text{div}(\lambda \text{grad } T) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 < t < t_e. \quad (10)$$

где ρ — плотность, c — теплоемкость, φ — индикатор ледосодержания, ω — водонасыщенность, L — удельная теплота плавления-кристаллизации, T — температура, t — время, \mathbf{u} — скорость фильтрации, λ — теплопроводность. Скорость фильтрации определяется из решения задачи для давления по закону Дарси. Уравнение (10) дополняем граничными условиями: на боковых границах основания плотины считаем, что поток тепла отсутствует

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_4, \quad (11)$$

на верхней границе области определяем граничное условие третьего рода, которое описывает теплообмен с воздухом

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha_a (T - T_a), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_a, \quad (12)$$

на нижней границе задаем фиксированную температуру

$$T = T_d, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_d, \quad (13)$$

на поверхностях контакта с водоемами определяем граничное условие третьего рода, которое описывает теплообмен с водой

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha_w (T - T_w), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_t, \quad (14)$$

где n — внешняя нормаль к границе, $\alpha_a(t)$ и $T_a(t)$ — суммарный коэффициент теплообмена и температура воздуха, T_d — температура грунта на нижней границе, α_w и $T_w(\mathbf{x}, t)$ — коэффициент конвективного теплообмена и температура воды в водоемах.

Для замыкания системы уравнений задаем начальное распределение температуры

$$T(\mathbf{x}, 0) = T^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (15)$$

Индикатор ледосодержания φ определяем как кусочно-линейную функцию, которая зависит от текущей температуры

$$\varphi(T) = \begin{cases} 1, & T \leq T_* - T_\Delta, \\ \frac{T_* + T_\Delta - T}{2T_\Delta}, & T_* - T_\Delta < T < T_* + T_\Delta, \\ 0, & T \geq T_* + T_\Delta, \end{cases}$$

где $T_*(\mathbf{x})$ — средняя температура фазового перехода, T_Δ — значение определяющее интервал фазового перехода.

Теплоемкость и теплопроводность записываем через индикатор ледосодержания и значения в талой и в мерлой зонах

$$\begin{aligned} c(\mathbf{x}, T) &= \varphi(T)c_-(\mathbf{x}) + (1 - \varphi(T))c_+(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \lambda(\mathbf{x}, T) &= \varphi(T)\lambda_-(\mathbf{x}) + (1 - \varphi(T))\lambda_+(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

где $c_-(\mathbf{x}), c_+(\mathbf{x})$ — теплоемкость мерзлой и талой зоны и $\lambda_-(\mathbf{x}), \lambda_+(\mathbf{x})$ — теплопроводность мерзлой и талой зоны.

Начально-краевая задача описывается системой уравнений (10)–(15).

3. Аппроксимация

Для аппроксимации задачи для давления (6)–(9) и задачи для температуры (10)–(15) по времени используем метод конечных разностей, а для аппроксимации по пространству метод конечных элементов. Вводим равномерную сетку для времени с шагом τ

$$\omega_t = \{t = t^n \mid t^n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad N\tau = t_e\}. \quad (16)$$

Для основных уравнений (6) и (10) используем двухслойную схему расщепления по физическим процессам с линеаризацией коэффициентов из предыдущего временного слоя. Обозначим через P^{n+1} и T^{n+1} давление и температуру $n + 1$ -го временного слоя, соответственно.

Каждый временной слой находим приближенное решение с помощью метода конечных элементов. Исходную дифференциальную задачу формулируем в вариационной постановке. Вариационная задача будет следующей: сперва, используя T^n нужно найти такую функцию $P^{n+1} \in V_P$, которая удовлетворяет

$$a_P(P^{n+1}, q) = f_P(q), \quad \forall q \in \hat{V}_P, \quad (17)$$

где $a_P(P^{n+1}, q)$ — билинейная форма, $f_P(v)$ — линейная форма, V_P — пространство пробных функций, q — тестовая функция, \hat{V}_P — пространство тестовых. Далее, используя вычисленный P^{n+1} находим такую функцию $T^{n+1} \in V_T$, которая удовлетворяет

$$a_T(T^{n+1}, v) = f_T(v), \quad \forall v \in \hat{V}_T, \quad (18)$$

где $a_T(T^{n+1}, v)$, $f_T(v)$, V_T , v , \hat{V}_T — все тоже самое как у задачи для давления.

Граничные условия (8), (11–12) учитываются в уравнениях (17) и (18) при использовании формулы Гаусса-Остроградского, т.е. при переходе с объемного на поверхностный интеграл.

4. Численная реализация

Геометрия и триангуляция областей строилась в программе GMSH. Программа GMSH является генератором 2D и 3D сеток конечных элементов со встроенной CAD системой. При построении геометрии определяются граничные подобласти $\Gamma_\alpha, \alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ и подобласти, такие как: противофильтрационный экран, обратный экран, цемзавеса, насыпка, опорная призма. В каждой подобласти определены свои физические параметры: коэффициент фильтрации, теплоемкость и теплопроводность.

Численное решение задачи реализована с помощью библиотеки для научных вычислений FEniCS. Библиотека FEniCS предназначен для решения систем дифференциальных уравнений методом конечных

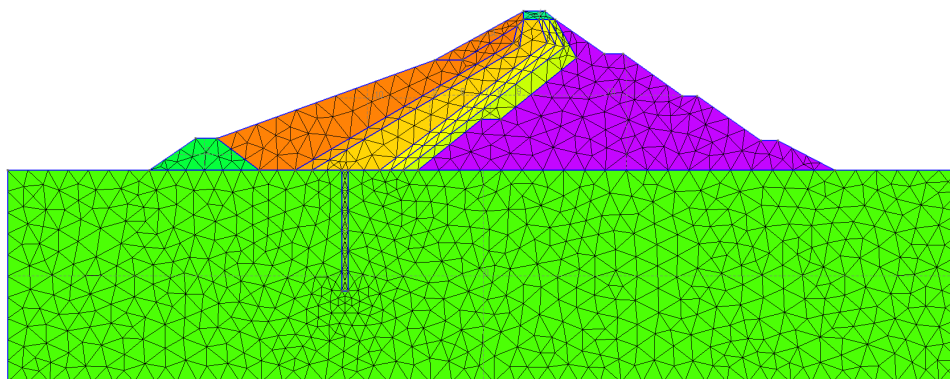


Рис. 2: Геометрия и сетка каменно-земляной плотины Вилюйской ГЭС-1,2 с противофильтрационным фильтром и цемзавесой

элементов. В качестве конечных элементов для давления и температуры выбраны лагранжевы элементы первого порядка, а для коэффициентов: теплопроводность, теплоемкость, водопроницаемость – разрывные лагранжевы элементы нулевого порядка.

При численном расчете на каждом временном слое сохраняются значения давления и температуры в формате VTK. Полученные результаты визуализируются в программе **Paraview**.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вабищевич П.Н.** Численное моделирование. — М.: Изд-во Московского университета, 1993.
2. **Самарский А.А., Вабищевич П.Н.** Аддитивные схемы для задач математической физики. — М.: Наука, 1999.
3. **Ippisch O., Vogel H.J., Bastian P.** Validity limits for the van Genuchten-Mualem model and implications for parameter estimation and numerical simulation // *Advances in water resources*. — 2006. — V. 29, № 12. — P. 1780–1789.
4. **Jame YihWu, Norum Donald I.** Heat and mass transfer in a freezing unsaturated porous medium // *Water Resources Research*. — 1980. — V. 16, № 4. — P. 811–819.
5. Software Gmsh. — <http://geuz.org/gmsh/>.
6. Software package FEniCS. — <http://fenicsproject.org/>.
7. Software VTK. — <http://www.vtk.org/>.
8. Software package Paraview. — <http://www.paraview.org/>.

REFERENCES

1. **Vabishchevich P.N.** Numerical simulation [Chislennoe modelirovanie]. — Moscow: Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta, 1993. (in Russian)
2. **Samarskii A.A., Vabishchevich P.N.** Additive schemes for problems of mathematical physics [Additivnye skhemy dlya zadach matematicheskoi fiziki]. — Moscow: Nauka, 1999. (in Russian)
3. **Ippisch O., Vogel H.J., Bastian P.** Validity limits for the van Genuchten-Mualem model and implications for parameter estimation and numerical simulation // *Advances in water resources*. — 2006. — V. 29, № 12. — P. 1780–1789.
4. **Jame YihWu, Norum Donald I.** Heat and mass transfer in a freezing unsaturated porous medium // *Water Resources Research*. — 1980. — V. 16, № 4. — P. 811–819.

5. Software Gmsh. – <http://geuz.org/gmsh/>.
6. Software package FEniCS. – <http://fenicsproject.org/>.
7. Software VTK. – <http://www.vtk.org/>.
8. Software package Paraview. – <http://www.paraview.org/>.